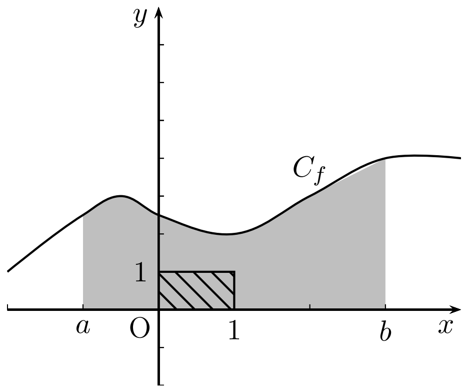
1 Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle $[a, b]$

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

- a et b deux réels tels que $a < b$.
- f une fonction **continue et positive** sur l'intervalle $[a, b]$.
- C_f la courbe représentant f.

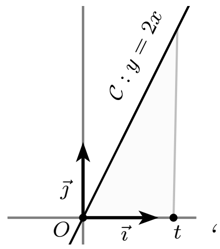
On appelle **intégrale de f de a à b** l'aire, exprimée en u.a, de la zone de plan suivante :

- sous la courbe C_f
- au dessus de l'axe des abscisses
- et entre les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

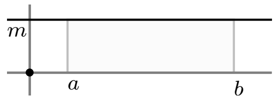


Notation : Cette aire se note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ou $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$; a et b sont les bornes de l'intégrale.

Exemple 1 *Calculer* $\int_0^t 2x\,dx$. *Dérivér par rapport à t le résultat obtenu. Remarque ?*



Exemple 2 *Calculer* $\int_a^b m\,dx$.



2 Algorithme d'approximation d'une intégrale : méthode des rectangles

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  v EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE n
  h PREND_LA_VALEUR (b-a)/n
  x PREND_LA_VALEUR a
  u PREND_LA_VALEUR 0
  v PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 0 A n-1
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR u+h*F1(x)
    x PREND_LA_VALEUR x+h
    v PREND_LA_VALEUR v+h*F1(x)
    FIN_POUR
  AFFICHER u
  AFFICHER v
FIN_ALGORITHME
```

3 Primitive

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une *primitive* de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur I et qui vérifie : $\boldsymbol{F' = f}$ sur $\boldsymbol{I}$.

Exemple 3 *Une primitive de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$ *est la fonction* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.

On a en effet pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x = f(x)$, *c'est-à-dire :* $F' = f$.

Une fonction admettant une primitive en admet une infinité. Dans l'exemple précédent, la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est également une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$.

Exemple 4 *Déterminer une primitive* F *de* $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$: ....

Exemple 5 *Déterminer une primitive* F *de* $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$: ....

Exemple 6 *si* u *dérivable sur* I, *une primitive sur* I *de* $u'e^u$ *est* ....

Méthode. D'après la définition d'une primitive, pour vérifier qu'une fonction F donnée est une primitive d'une fonction f donnée, il suffit de dériver F et de vérifier que l'on retrouve f.

Exemple 7 *Montrer que* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1 - e^{-x^2}}{2}$ *est une primitive de* f *définie par* $f(x) = xe^{-x^2}$............

Linéarité :
si f et g sont deux fonctions admettant respectivement F et G comme primitives sur l'intervalle I, et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I.

Preuve. En conséquence de la linéarité des dérivées : $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$.

Exemple 8 *Déterminer une primitive* F *sur* $\mathbb{R}$ *de* $f : x \mapsto 3\sin(x) + 2e^x$..

$n \neq -1$. Une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$ définie par$f(x) = x^n$ est $F : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Exemple 9 *En déduire une primitive de* $x \mapsto x^3 - 3x + 5$.

4 Primitives de référence

$f(x)$	$F(x)$	Domaine de validité	Condition
a	$ax + b$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$]0; +\infty[$	
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$		$n \in \mathbb{Z} \qquad n \neq -1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0, +\infty[$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$	
e^x	$e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$	
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u) + c$	I	$u > 0$ dérivable sur I
$u'(ax + b)$	$\dfrac{1}{a}u(ax + b) + c$		u dérivable sur I
$u'e^u$	$e^u + c$	I	u dérivable sur I

5 Ensemble des primitives d'une fonction

Propriété :
Si f admet F comme primitive sur l'intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G de la forme $G : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto F(x) + c$ où c est une constante réelle.

Preuve. Soit G une primitive de f sur I. La fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$ est dérivable et pour $x \in I$, $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
Donc H est une constante réelle c : $G(x) - F(x) = c$. D'où $G(x) = F(x) + c$.
Réciproquement, si $c \in \mathbb{R}$ la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ a pour dérivée $G'(x) = F'(x) = f(x)$ sur I, donc est une primitive de f.

Exemple 10 *Déterminer toutes les primitives de* $f : x \mapsto 3x + 2e^x$ *sur* $\mathbb{R}$ ....

Propriété :
Soit f admettant F comme primitive sur l'intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$.

Preuve. Les primitives de f sont de la forme $G(x) = F(x)+k$. Donc $G(x_0) = F(x_0)+k = y_0$ si et seulement si $k = y_0 - F(x_0)$. D'où f a pour unique primitive satisfaisant $G(x_0) = y_0$ la fonction définie par $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$.

Exemple 11 *Donner la primitive de* $x \mapsto 4x + 1$ *qui s'annule en* $x = 2$ ....

6 Lien entre intégrale et primitive

Théorème fondamental de l'intégration :

Soit f une fonction continue positive définie sur un intervalle $[a, b]$.
La fonction F définie sur $[a, b]$ par :

$$\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x}$$

est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a.

Autrement dit :
$F(a) = 0$ et F est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout x de $[a, b]$, on a $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

Preuve. La preuve de ce théorème utilise les propriétés sur les intégrales vues à la section 8.
Pour simplifier, on suppose en plus f croissante sur $[a, b]$. Soit $h > 0$.
$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$.
Comme f croissante, $f(x) \leq f(t) \leq f(x + h)$ pour $t \in [x; x + h]$. En intégrant cette inégalité, on obtient :
$(x + h - x)f(x) \leq F(x + h) - F(x) \leq (x + h - x)f(x + h)$ d'où $f(x) \leq \dfrac{F(x + h) - F(x)}{h} \leq f(x + h)$.
En raisonnant de même pour h négatif, on obtient une inégalité en sens inverse.
Or f est continue : $\lim_{h\to 0} f(x + h) = f(x)$. D'où : $\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$.

7 Calcul d'intégrales

Théorème du calcul d'intégrales :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.
L'aire, en u.a, du domaine "sous la courbe C_f, au dessus de l'axe des abscisses et entre les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ " est donnée par :

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)} \quad \text{où} \quad F \quad \text{est une } \textbf{primitive} \text{ de} \quad f \quad \text{sur} \quad [a, b]$$

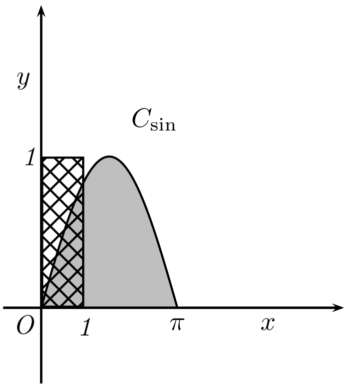
Preuve. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Comme $x \mapsto \int_a^x f(x)dx$ est aussi une primitive de f, il existe une constante c telle que $F(x)+c=\int_a^x f(x)dx$. Ainsi, $F(a)+c=\int_a^a f(x)dx=0$ d'où $c=-F(a)$.
En posant $x=b$ on obtient $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$.

Exemple 12 $\int_1^2 3x^2dx=[x^3]_1^2=2^3-1^3=7$
$\int_0^{\frac{1}{2}} e^x\,dx=$ ....
$\int_2^3 x^2\,dx=$ ....
$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx=$ ....

Exemple 13 *:*

Calcul de l'aire, en u.a, sous la courbe "sinus" et au dessus de l'axe des abscisses et entre les valeurs $x=0$ et $x=\pi$.

L'aire cherchée, en u.a, est $\mathcal{A}=\int_0^{\pi}\sin(x)dx$ car la fonction sin *est positive sur l'intervalle $[0,\pi]$.*
D'après le théorème, cette intégrale se calcule avec une primitive de la fonction sin.
On présente les calculs ainsi :
$\mathcal{A}=\int_0^{\pi}\sin(x)dx$
$\mathcal{A}=[-\cos(x)]_0^{\pi}=(-\cos(\pi)-(-\cos(0))=1+1=2$
L'aire cherchée vaut 2 u.a.



8 Extension de l'intégrale aux fonctions de signe quelconque

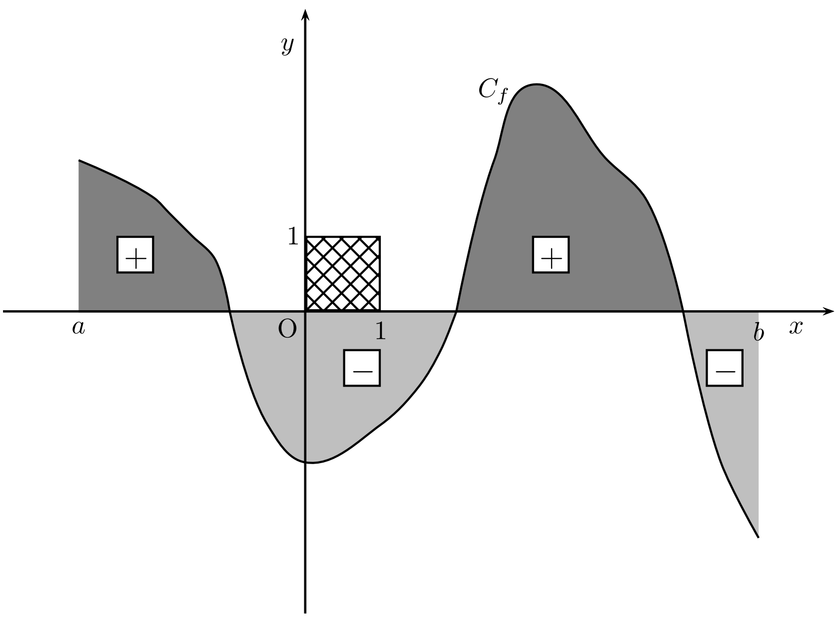
Cas d'une fonction négative :
Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle I .
On appelle intégrale de f de a à b l'opposé de l'aire, exprimée en u.a, du domaine D :

$$\text{D}=\{M(x,y) \text{ tels que } a\leq x\leq b \text{ et } f(x)\leq y\leq 0\}.$$

On conserve la notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

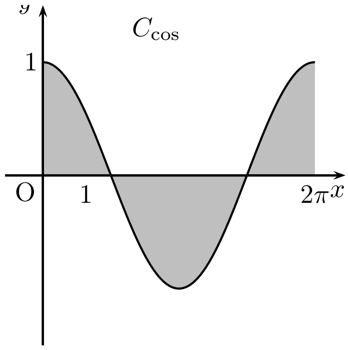
Cas d'une fonction de signe quelconque :
Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I .
On appelle intégrale de f de a à b la somme algébrique des aires, exprimées en u.a, du domaine entre la courbe C_f et l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$.
L'aire est comptée **positivement** si C_f est **au dessus de l'axe des abscisses** et **négativement** si C_f est **au dessous de l'axe des abscisses**.

Illustration et exemple :



Quand on calcule $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, on calcule la somme des aires des parties grisées ; celles qui sont grisées sombres sont comptées positivement et celles grisées clairs sont comptées négativement.
Le résultat du calcul de l'intégrale de f de a à b n'est donc plus une aire.

Calcul de l'intégrale suivante : $\int_0^{2\pi} \cos(x)\mathrm{d}x$.



$\int_0^{2\pi} \cos(x)\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{2\pi}$.

$[\sin(x)]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0$.

Donc $\int_0^{2\pi} \cos(x)\mathrm{d}x = 0$

9 Propriétés de l'intégrale

Permutation des bornes
a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. On a :

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Positivité de l'intégrale
Si f est continue et **positive** sur l'intervalle $[a, b]$ alors :

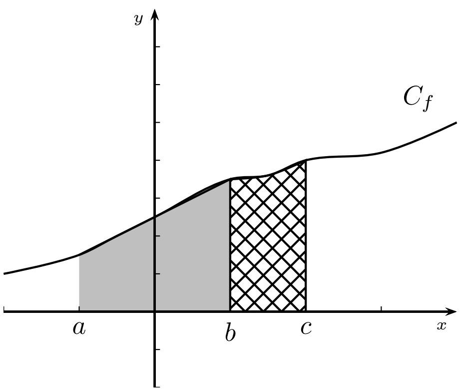
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0.$$

Linéarité de l'intégrale

1. f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$
$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
2. k est une constante.
$$\int_a^b (kf)(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
3. Relation de Chasles :

$$\boldsymbol{\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x} \text{ en particulier } \boldsymbol{\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0}$$

Interprétation graphique de cette relation dans le cas où f est positive et $a < b < c$



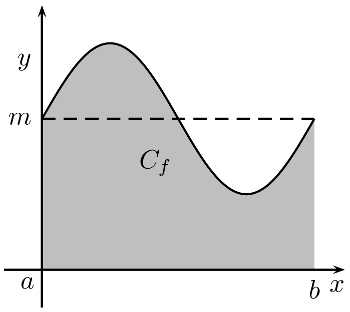
Comparaison d'intégrales
Si f et g sont continues sur l'intervalle $[a,b]$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de $[a,b]$ alors :

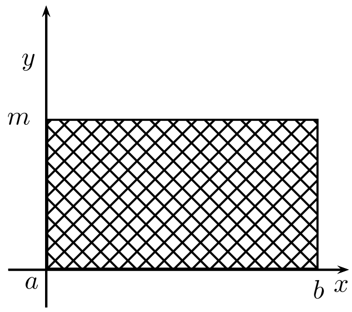
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Valeur moyenne d'une fonction
définition : f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$
On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel m calculé ainsi :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Interprétation graphique de la valeur moyenne d'une fonction :





Exemple de calcul de la valeur moyenne de la fonction f sur $[0,2]$ définie par $f(x) = x^2$.

On sait que la valeur moyenne de f sur $[0,2]$ se calcule avec $m = \dfrac{1}{2-0}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x$.
$m = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{1}{2}(\dfrac{2^3}{3} - \dfrac{0^3}{3}) = \dfrac{4}{3}$. La valeur moyenne de f sur $[0,2]$ est $\dfrac{4}{3}$.

Inégalité de la moyenne
f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$
Si, pour tout x de $[a,b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$ où m et M sont deux constantes alors on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Exemple 14 *On considère la suite I_n définie pour tout entier naturel n positif par :* $\boldsymbol{I_n = \int_0^1 x^n e^x dx}$.

1. *Calculer I_0.*
2. *Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto xe^x$. En déduire I_1.*
3. *Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).*
4. *On pose $f_n(x) = x^n e^x$. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, on a $0 \leq f_n(x) \leq ex^n$.*
5. *En déduire que : $0 \leq I_n \leq e\int_0^1 x^n dx$. Conclure sur la limite de la suite (I_n).*

 page 6 page 6

10 Aire d'un domaine compris entre deux courbes

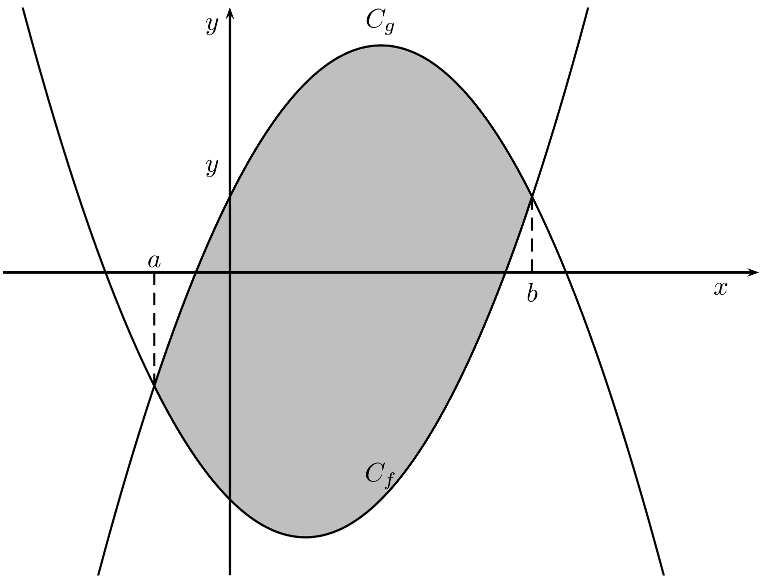
Propriété

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et telles que,

pour tout x de $[a, b]$ on ait $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$

alors l'aire, en u.a, du domaine compris entre les deux courbes C_g et C_f représentant g et f et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ se calcule avec :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (\boldsymbol{g(x) - f(x)})\mathrm{d}x.$$



Exemple 15 *Calculer en u.a. l'aire du domaine décrit par* $-1 \leq x \leq 1$ *et* $x - 1 \leq y \leq x - x^2$.